

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТОРГОВЕЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ**

**СИСТЕМА УПРАВЛІННЯ ЯКІСТЮ**

**Система забезпечення якості освітньої діяльності та якості вищої освіти  
сертифікована на відповідність ДСТУ ISO 9001:2015 / ISO 9001:2015**

**Кафедра вищої та прикладної математики**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

вченою радою

(пост. п. 1 від 20.05.2020 р.)

Ректор



**А. А. Мазаракі**

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА  
СТАТИСТИКА /  
PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL  
STATISTICS**

**ПРОГРАМА /  
COURSE SUMMARY**

**Київ 2020**

**Розповсюдження і тиражування без офіційного дозволу КНТЕУ  
заборонено**

Автори:

С.С. Карташова доктор біол. наук, канд. фіз. - матем. наук, професор

С.В. Білоусова, канд. фіз. - матем. наук, доцент

Л.З. Машенко, канд. фіз. - матем. наук, доцент

Розглянуто та затверджено на засіданні кафедри вищої та прикладної математики 22 квітня 2020 р., протокол № 9.

Рецензенти:            Роскладка А.А., доктор екон. наук професор,  
                              зав. кафедри цифрової економіки та системного аналізу

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА /**  
**Probability theory and mathematical statistics**

**ПРОГРАМА**  
**COURSE SUMMARY**

## ВСТУП

Програму вивчення обов'язкової дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» складено відповідно до структурно-логічної схеми, що передбачено освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів із галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 124 «Системний аналіз», спеціалізації «Інформаційні технології та бізнес-аналітика (Data Science)». Програма охоплює всі змістові модулі, визначені тематичним планом.

Програму підготовлено відповідно до Стандартів вищої освіти України зі спеціальності 124 «Системний аналіз» та відповідної освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів КНТЕУ.

Програма складається з таких розділів:

1. Мета, завдання та предмет дисципліни.
2. Передумови вивчення дисципліни як вибіркової компоненти освітньої програми.
3. Результати вивчення дисципліни.
4. Зміст дисципліни.
5. Список рекомендованих джерел.

### І. МЕТА, ЗАВДАННЯ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

*Мета дисципліни:* надати студентам необхідний рівень підготовки для формування базових знань достатніх для адекватного застосування теоретико - ймовірнісних методів та використання моделювання випадкових процесів при розв'язанні конкретних економічних задач прикладного характеру, а також забезпечення неперервності освіти.

*Завдання дисципліни:*

- ознайомити студентів із основними поняттями теорії ймовірностей та математичної статистики;
- навчити обчислювати ймовірності подій, користуючись різними означеннями ймовірностей та стандартними формулами;
- ознайомити з основними дискретними та неперервними розподілами; вміти знаходити числові характеристики випадкових величин;
- ознайомити зі стандартними задачами математичної статистики;
- навчити будувати точкові та інтервальні оцінки невідомих параметрів в задачах параметричної та непараметричної статистики;

- навчити здійснювати перевірку статистичних гіпотез та інтерпретувати отримані результати;
- здобути практичні навички побудови математико-статистичних моделей випадкових явищ та процесів, навчити користуватися сучасними прикладними пакетами статистичних програм, що призначені для аналізу статистичної інформації.

*Предметом дисципліни є методи і засоби вирішення задач ймовірнісної та математичної статистики для практичного застосування у бізнес сфері.*

## **2. ПЕРЕДУМОВИ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ ЯК ВИБІРКОВОЇ КОМПОНЕНТИ ОСВІТНЬОЇ ПРОГРАМИ**

*знання*

- опанування навчальної дисципліни «Дискретна математика»;
- опанування навчальної дисципліни «Математичний аналіз»;

## **3. РЕЗУЛЬТАТИ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ**

Дисципліна «Теорія ймовірностей та математична статистика» забезпечує оволодіння студентами загальними та фаховими компетентностями і досягнення ними програмних результатів навчання за освітньо-професійною програмою:

*«Інформаційні технології та бізнес-аналітика (Data Science)» (ОС бакалавр)*

| Номер в освітній програмі                             | Зміст компетентності  | Номер теми, що розкриває зміст компетентності |
|---|---|---|
| <i>Загальні компетентності за освітньою програмою</i> |   |   |
| K01   | Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу  | 1-14  |
| K07   | Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел   | 1-14  |
| <i>Фахові компетентності за освітньою програмою</i>   |   |   |
| K18   | Здатність формалізувати проблеми, описані природною мовою, у тому числі за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів. | 1-14  |
| K19   | Здатність будувати математично коректні моделі статичних та динамічних процесів і систем із зосередженими та розподіленими  | 4, 10-14                                      |

|   |  |             |
|---|--|-------------|
|   | параметрами із врахуванням невизначеності зовнішніх та внутрішніх факторів.  |             |
| K20   | Здатність визначати основні чинники, які впливають на розвиток фізичних, економічних, соціальних процесів, виокремлювати в них стохастичні та невизначені показники, формулювати їх у вигляді випадкових або нечітких величин, векторів, процесів та досліджувати залежності між ними.   | 1-14        |
| K25   | Здатність представляти математичні аргументи і висновки з них з ясністю і точністю і в таких формах, які підходять для аудиторії як усно так і в письмовій формі.  | 1,2,9,10-14 |
| <i>Програмні результати навчання за освітньою програмою</i> |  |             |
| ПР01  | Знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, аналітичну геометрію, лінійну алгебру та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі, необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу. | 1-14        |
| ПР02  | Вміти використовувати стандартні схеми для розв'язання комбінаторних та логічних задач, що сформульовані природною мовою, застосовувати класичні алгоритми для перевірки властивостей та класифікації об'єктів, множин, відношень, графів, груп, кілець, решіток, булевих функцій тощо.  | 10-14       |
| ПР14  | Розуміти і застосовувати на практиці методи статистичного моделювання і прогнозування, оцінювати вихідні дані.   | 3-14        |
| ПР18  | <i>Володіти достатніми знаннями математичних моделей і методів аналітики даних, мов моделювання та програмних засобів для виконання практичних завдань бізнес-аналізу.</i>   | 3-14        |

## 4. ЗМІСТ ДИСЦИПЛІНИ

### Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей

Стохастичний експеримент його роль та місце при моделюванні соціально-економічних та природничих процесів. Предмет теорії ймовірностей. Частотна інтерпретація ймовірності, статистична стійкість. Математична модель стохастичного експерименту. Простір елементарних подій. Алгебри та  $\sigma$  - алгебри випадкових подій. Елементи теорії міри. Аксиоматичний підхід до побудови ймовірнісного простору (аксіоматика А.М. Колмогорова). Ймовірність на дискретному просторі елементарних наслідків стохастичного експерименту. Теорема суми для  $n$  випадкових подій, визначених на одному ймовірнісному просторі.

#### Список рекомендованих джерел:

Основний: 1, 3, 5.

Додатковий: 6, 7.

### Тема 2. Класичний, статистичний та геометричний підходи до означення ймовірностей

Класичне означення ймовірностей. «Схема урн» для визначення загального числа елементарних наслідків в стохастичних експериментах, які задовольняють класичному означенню: вибір з поверненням та без повернення. Елементи комбінаторного аналізу: основне правило комбінаторики, принципи редукції та незалежного вибору, основні комбінаторні формули (число розміщень, сполучень і перестановок). Обчислення класичних ймовірностей з використанням функцій COMBIN та FACT в середовищі MS Excel. Гіпергеометричний розподіл та його узагальнення. Статистичне означення ймовірностей та їх властивості. Поняття про міру Лебега. Геометричне означення ймовірностей. Задача про зустріч. Практичне застосування різних підходів до побудови ймовірнісного простору: задача Бюффона, парадокс Бертрана. Візуалізація результатів побудови ймовірнісного простору засобами MS Office.

#### Список рекомендованих джерел:

Основний: 2, 3, 4, 5.

Додатковий: 6, 7.

### Тема 3. Умовна ймовірність та поняття про незалежність подій. Формули повної ймовірності та Байєсса

Умовна ймовірність та теорема добутку для залежних подій. Поняття попарної незалежності випадкових подій. Незалежність випадкових подій у сукупності та теорема добутку для них. Повна група

подій, або гіпотез. Формула повної ймовірності та формули Байєсса. Приклади розв'язання та оформлення рішення типових задач в середовищі MS Excel. Принципи використання байєсовського підходу при послідовній процедурі прийняття рішень.

**Список рекомендованих джерел:**

Основний: 2, 4, 5.

Додатковий: 6, 7, 9.

**Тема 4. Моделі повторних випробувань. Граничні теореми Муавра-Лапласа, Бернуллі та Пуассона**

Модель незалежних повторних випробувань як прямий добуток ймовірнісних просторів. Випробування за схемою Бернуллі. Розподіл числа успіхів при проведенні  $n$  незалежних випробувань. Біноміальний розподіл в середовищі MS Excel: функція BINOM.DIST ( $B(n,p)$ ). Найвірогідніше число успіхів та його ймовірність. Наближені методи обчислення біноміальних ймовірностей та їх точність. Локальна теорема Муавра-Лапласа. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Теорема Бернуллі для оцінки дійсної ймовірності через статистичну частоту. Приклади використання при визначенні мінімально достатнього обсягу вибірових досліджень із залученням ППП ЕРІ-ІНФО. «Рідкісні» події. Формула Пуассона: приклади задач та розрахунки за допомогою функції POISSON.DIST в MS Excel. Номер першого успішного випробування в серіях незалежних стохастичних експериментах за схемою Бернуллі. Геометричний розподіл.

**Список рекомендованих джерел:**

Основний: 3, 5.

Додатковий: 6, 7, 8, 9.

**Тема 5. Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики**

Означення випадкових величин та їх класифікація. Закон розподілу дискретної випадкової величини. Таблиця та полігон розподілу, їх представлення в середовищі MS Excel. Числові характеристики розподілу ймовірностей: математичне очікування, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, початкові та центральні моменти, їх властивості та способи обчислення засобами MS Excel з використанням пакету «Аналіз даних». Основні закони дискретних розподілів та їх числові характеристики (вироджений, гіпергеометричний розподіл, від'ємний біноміальний розподіл, розподіл Бернуллі, розподіл Пуассона, геометричний розподіл): формальне визначення та графічне представлення в MS Excel за допомогою функцій BINOM.DIST,

NEGBINOM.DIST, HYPGEOM.DIST та ін. Приклади застосування дискретних розподілів в типових фахових задачах.

**Список рекомендованих джерел:**

Основний: 1, 4, 5.

Додатковий: 6, 8, 9.

**Тема 6. Неперервні та абсолютно неперервні випадкові величини. Функція та щільність розподілу ймовірностей. Числові характеристики**

Означення неперервних випадкових величин. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини та її властивості. Поняття про інтеграл Лебега-Стільтьєсса. Абсолютно неперервні випадкові величини. Щільність розподілу та її властивості. Перетворення випадкових величин. Щільність розподілу функцій від абсолютно неперервних випадкових величин. Числові характеристики абсолютно неперервних випадкових величин та їх властивості. Характеристична та виробляюча функції. Квантілі. Приклади розв'язання типових задач на побудову функції та щільності розподілу, обчислення їх характеристик засобами MS Excel.

**Список рекомендованих джерел:**

Основний: 2, 4, 5.

Додатковий: 5, 6, 9.

**Тема 7. Найважливіші абсолютно неперервні розподіли, їх властивості та числові характеристики**

Рівномірний закон розподілу ймовірностей та його числові характеристики. Показниковий (експоненціальний) закон розподілу. Властивість відсутності післядії. Гамма-розподіл. Нормальний закон розподілу ймовірностей, його стандартне представлення та правило трьох  $\sigma$ . Розподіл Вейбулла. Логарифмічно-нормальний розподіл. Візуальний супровід розв'язання типових задач з використанням функцій RAND, EXPON.DIST, GAMMA.DIST, NORM.DIST, PHI, WEIBULL.DIST, LOGNORM.DIST в середовищі MS Excel.

**Список рекомендованих джерел:**

Основний: 1, 2, 3, 5.

Додатковий: 6-9.

**Тема 8. Випадкові вектори та закони їх розподілів: сумісні, маргінальні, умовні (4).**

Випадкові вектори та сумісний закон розподілу ймовірностей його компонент. Маргінальні функції розподілу компонент випадкового



вектора. Дискретні та абсолютно неперервні розподіли. Маргінальні щільності розподілу компонент випадкового вектору. Умовні закони розподілу ймовірностей випадкового вектору. Системи незалежних випадкових величин. Умовні та маргінальні числові характеристики. Коваріаційна та кореляційна матриця. Розподіли Хі-квадрат, Стюдента та Фішера, їх зв'язок зі стандартним нормальним розподілом. Багатовимірний нормальний розподіл. Біржовий парадокс. Приклади розв'язання типових задач засобами MS Excel.

**Список рекомендованих джерел:**

Основний: 5.

Додатковий: 6-9.

**Тема 9. Випадкові послідовності. Граничні теореми.**

Нерівності Маркова та Чебишева. Збіжність послідовностей випадкових величин за ймовірністю та майже напевно. Закони великих чисел та умови їх виконання. Слабка збіжність чи збіжність за розподілом. Центральна гранична теорема. Теорема Ляпунова для послідовностей незалежних однаково розподілених випадкових величин. Застосування граничних теорем при формуванні теоретичної бази математичної статистики.

**Список рекомендованих джерел:**

Основний: 2, 3, 5.

Додатковий: 6, 7.

**Тема 10. Елементи теорії випадкових процесів та теорії масового обслуговування**

Визначення випадкового процесу та його характеристики. Стаціонарні та ергодичні випадкові процеси. Функція кореляції та її властивості. Гауссовські випадкові процеси. Марківські процеси. Ланцюги Маркова з дискретним часом. Визначення та класифікація станів за асимптотичною властивістю перехідних ймовірностей. Ланцюги Маркова з неперервним часом. Диференціальні рівняння Колмогорова. Граничні (фінальні) ймовірності станів. Час переходу з одного стану в інший для ланцюгів Маркова з неперервним часом. Процеси загибелі та розмноження. Поняття про випадковий потік подій. Найпростіший потік та пуассонівський процес. Основні поняття теорії масового обслуговування. Марківські системи масового обслуговування. Системи масового обслуговування з відмовами. Поняття про метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло).

**Список рекомендованих джерел:**

Основний: 5.

Додатковий: 7, 8, 9.

### **Тема 11. Основні поняття математичної статистики: вибіркові спостереження та вибіркові оцінки**

Основні положення вибіркового методу. Вибірковий розподіл. Емпірична функція розподілу та гістограма. Вибіркові моменти. Статистичні оцінки та їх властивості. Збіжність статистичних оцінок - емпіричних характеристик за даними спостережень до теоретичних аналогів. Властивості емпіричної функції розподілу. Властивості гістограми. Властивості вибірових моментів. Груповані дані вибірових спостережень. Застосування модуля «Описові статистики» пакету «Аналіз даних» в середовищі MS Excel при обчисленні статистичних оцінок.

#### **Список рекомендованих джерел:**

Основний: 1, 5.

Додатковий: 6, 8, 9.

### **Тема 12. Методи параметричної та непараметричної оцінки параметрів**

Точкові оцінки щодо параметричної сукупності розподілів. Методи знаходження оцінок: метод моментів та максимальної вірогідності. Порівняння точкових оцінок. Інтервальні оцінки. Загальний алгоритм побудови довірчих границь (інтервальних оцінок) певного рівня значущості для точкових оцінок. Інтервальні оцінки для нормальної статистичної моделі, їх практична побудова для наявних даних статистичних спостережень за допомогою функцій CONFIDENCE.NORM та CONFIDENCE.T в середовищі MS Excel.

#### **Список рекомендованих джерел:**

Основний: 5.

Додатковий: 6-9.

### **Тема 13. Методи перевірки статистичних гіпотез**

Загальний алгоритм перевірки статистичних гіпотез. Типи помилок при перевірці гіпотез та потужність критерію. Критерії узгодженості: критерій Колмогорова-Смірнова та Пірсона. Перевірка гіпотез про однорідність та незалежність. Критерії Стюдента щодо перевірки гіпотез про значення середніх для нормальної статистичної моделі у випадку рівних (нерівних) дисперсій. Критерій  $\chi^2$ -квадрат про єдину дисперсію для нормальної статистичної моделі. Критерій Фішера про рівність (нерівність) двох дисперсій для нормальної статистичної моделі. Перетворення Фішера для перевірки гіпотез про взаємну незалежність. Непараметричні критерії перевірки статистичних гіпотез: медіанний, пар, знаків. Коефіцієнти рангової кореляції Спірмена та Кендала. Розв'язання типових задач на перевірку

статистичних гіпотез щодо наявних даних спостережень із застосуванням пакету «Аналіз даних» в середовищі MS Excel.

**Список рекомендованих джерел:**

Основний: 1, 5.

Додатковий: 6-9.

**Тема 14. Елементи дисперсійного та регресійного аналізу. Поняття про факторний та кластерний аналіз даних статистичних спостережень**

Основи однофакторного та двофакторного дисперсійного аналізу: групові, між групові середні та дисперсії, коефіцієнт варіації та інформативності. Регресійні моделі як інструмент аналізу і прогнозуванню економічних явищ. Парна лінійна та нелінійна регресія: побудова інтервальних оцінок та перевірка моделі на адекватність даним спостережень за допомогою пакета «Аналіз даних» в середовищі MS EXCEL. Множинна лінійна регресія. Основні положення та сфери застосування факторного та кластерного аналізу. Особливості практичного застосування пакетів прикладних статистичних програм (Statistica, Statgraphic, Epi-Info тощо) та модуля «Аналіз даних» в середовищі MS EXCEL при аналізі даних спостережень.

**Список рекомендованих джерел:**

Основний: 1, 2.

Додатковий: 6-9.

### **ІІІ. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ**

#### **Основний**

1. Барковський В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: підручник/ В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін.— К.: Центр учбової літератури, 2010. — 424 с.

2. Голомозий В.В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посібник / В.В. Голомозий, М.В. Карташов, К.В. Ральченко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2015. – 366 с.

3. Донченко В. С. Теорія ймовірностей та математична статистика для соціальних наук : навч. посіб. / В. С. Донченко, М. В.-С. Сидоров. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2015. – 400 с

4. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посібн. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов. К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с.

5. *Карташова С.С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Практикум. Навч. посібник для студ. вищ. навч. закл. / С.С. Карташова, В.В. Рязанцева. – К.: КНТЕУ, 2012.– 240 с.*

## **ДОДАТКОВИЙ**

6. Сеньо П.С. Випадкові процеси: [підручник для студентів ВНЗ] / П.С. Сеньо. – Львів : Компакт, 2006. – 288 с.

7. Suhov, Y. and Kelbert, M. Probability and statistics by example. Vol.2. Markov chains: a primer in random processes and their applications. Cambridge University press, 2008.

8. Карташов М. В. Теорія ймовірностей і математична статистика: підруч. для студ. вищ. навч. закл. / М. В. Карташов. - К. : Київський університет, 2009. - 480 с.

9. Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика : Посібник. – - К.: Київський університет, 2008.– 494 с.

## **Інтернет ресурси**

10. STATISTICA Base. [Електронний ресурс] // Режим доступу: [http://statsoft.com/products/STATISTICA\\_Base/](http://statsoft.com/products/STATISTICA_Base/)

*Примітка. Курсивом позначені джерела, які є в бібліотеці КНТЕУ.*