

ДЕРЖАВНИЙ ТОРГОВЕЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

СИСТЕМА УПРАВЛІННЯ ЯКІСТЮ

Система забезпечення якості освітньої діяльності та якості вищої освіти
сертифікована на відповідність ДСТУ ISO 9001:2015 / ISO 9001:2015

Кафедра вищої та прикладної математики

ЗАТВЕРДЖЕНО

вченою радою

(пост. п. 8 від «27» 10 2022р.)

Ректор



Анаторій МАЗАРАКІ

ВЕКТОРНИЙ І ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ / VECTOR AND TENSOR ANALYSIS

РОБОЧА ПРОГРАМА / COURSE OUTLINE

освітній ступінь	бакалавр	/	bachelor
галузь знань	<u>12 Інформаційні технології</u>	/	<u>Information Technology</u>
спеціальність	<u>126 Інформаційні системи та технології</u>	/	<u>Information Systems and Technologies</u>
освітня програма	<u>Інформаційні системи та технології</u>	/	<u>Information Systems and Technologies</u>

Київ 2022

**Розповсюдження і тиражування без офіційного дозволу КНТЕУ
заборонено**

Автори: М.О. БЄЛОВА, кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри вищої та прикладної математики
В.І.ДЕНИСЕНКО, кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри вищої та прикладної математики
В.Ю. КОТЛЯР, кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри вищої та прикладної математики
С.В.МИХАЙЛЕНКО, кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри вищої та прикладної математики

Робочу програму розглянуто та схвалено на засіданні кафедри вищої
та прикладної математики 31 серпня 2022 р., протокол № 1

Рецензенти: С.В. БІЛОУСОВА, кандидат фіз. – матем. наук, доцент
кафедри вищої та прикладної математики,
В.В.КОЗЛОВ, кандидат технічних наук, доцент кафедри
комп'ютерних наук та інформаційних систем

**ВЕКТОРНИЙ І ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ /
VECTOR AND TENSOR ANALYSIS**

**РОБОЧА ПРОГРАМА /
COURSE OUTLINE**

освітній ступінь	Бакалавр / Bachelor
галузь знань	12 Інформаційні технології / Information Technologies
спеціальність	126 Інформаційні системи та технології / Information Systems and Technologies
освітньо-професійна програма	Інформаційні системи та технології / Information Systems and Technologies

1. СТРУКТУРА ДИСЦИПЛІНИ ТА РОЗПОДІЛ ГОДИН ЗА ТЕМАМИ (ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН)

Назва теми	Кількість годин			Форми контролю	
	Усього годин / кредитів	з них			
		лекції	лабораторні заняття		самостійна робота студентів
Тема 1. Основні елементи векторної алгебри.	22	4	4	14	О, ДЗ, ДКР
Тема 2. Поняття тензора та закон перетворення його компонент. Приклади та властивості тензорів.	22	4	4	14	Т, ДЗ, ДКР
Тема 3. Криволінійні координати. Ортогональні системи координат.	22	4	4	14	О, ДЗ
Тема 4: Операції над тензорами. Головні осі тензора. Інваріанти тензора.	22	4	4	14	О, ДЗ, ДКР
Тема 5. Тензорні, скалярні і векторні поля та їх характеристики.	26	6	6	14	Т, ДЗ, ДКР
Тема 6. Інтегральні теореми векторного аналізу. Диференціальні операції першого і другого порядку.	22	4	4	14	О, ДЗ, ДКР
Тема 7. Спеціальні види векторних полів.	22	4	4	14	О, ДЗ, ДКР
Тема 8. Елементи тензорного аналізу. Коваріантне диференціювання тензорів.	22	4	4	14	Т, ДЗ
Разом	180/6	34	34	112	
Підсумковий контроль – екзамен					

Т – тестування; О – опитування; ДЗ – перевірка домашнього завдання; ДКР – домашня контрольна робота; АКР – аудиторна контрольна робота.

**2. ТЕМАТИКА ТА ЗМІСТ ЛЕКЦІЙНИХ, ПРАКТИЧНИХ
(СЕМІНАРСЬКИХ), ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ, САМОСТІЙНОЇ
РОБОТИ СТУДЕНТІВ**

Результати навчання	Навчальна діяльність*	Робочий час студента, год.
1	2	3
<p>Знати: основні операції над векторами та їх властивості, вивчити сутність лінійної залежності векторів, поняття базису, особливості контраваріантних і коваріантних компонент вектора та прямокутної декартової системи координат.</p> <p>Вміти: використовувати теоретичні знання про основні елементи векторної алгебри на практиці.</p>	<p>Тема 1. Основні елементи векторної алгебри. Лекція № 1. План лекції: Основні елементи векторної алгебри.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Основні операції над векторами та їх властивості. 2. Лінійна залежність векторів. 3. Векторний базис. 4. Розклад вектора за базисними векторами. 5. Поняття ортонормованого базису. <p>Лекція № 2. План лекції: Основні елементи векторної алгебри.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Контраваріантні і коваріантні компоненти вектора. 2. Зв'язок між коваріантними й контраваріантними компонентами вектора. 3. Прямокутна декартова система координат. <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	2
	<p>Самостійна робота.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Теоретичне завдання: вивчити особливості взаємних базисів та їх властивості. 2. Практичне завдання: навести приклади задач, для запису яких застосовуються вектори. <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	14

	ПЗ 1. Виконання вправ з діями над векторами. Виконання вправ із визначення залежних векторів.	2
	ПЗ 2. Виконання вправ із розкладу вектора за базисними векторами. Побудова ортонормованого базису.	2
<p>Знати: поняття і властивості тензорів та закон перетворення його компонент.</p> <p>Вміти: використовувати теоретичні знання про поняття тензора, закон перетворення його компонент, види тензорів та їх основні властивості.</p>	<p>Тема 2. Поняття тензора та закон перетворення його компонент. Приклади та властивості тензорів. Лекція № 3. Поняття тензора та закон перетворення його компонент. План лекції: 1. Часткові випадки тензорів у тривимірному просторі. 2. Скаляр і вектор як тензори нульового і першого рангу. 3. Означення тензора в загальному випадку. 4. Закон перетворення компонент тензора. 5. Розклад тензора за векторами.</p> <p>Лекція № 4. Приклади тензорів та основні їх властивості за видами. План лекції: 1. Тензор напружень 2. Тензор моментів інерції 3. Метричний тензор.</p> <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	2
	<p>Самостійна робота студентів: 1. Теоретичне завдання: вивчити компоненти тензора. 2. Практичне завдання: розібрати приклади на перетворення компонент тензора та розклад тензора за векторами.</p> <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	14

	ПЗ 3. Побудова прикладів тензорів у тривимірному просторі. Використання закону перетворення компонент тензора.	2
	ПЗ 4. Виконання вправ з розкладу тензора за векторами.	2
<p>Знати: поняття та особливості криволінійних та ортогональних систем координат.</p> <p>Вміти: використовувати теоретичні знання про криволінійні та ортогональні системи координат та їх властивості на практиці.</p>	<p>Тема 3. Криволінійні координати. Ортогональні системи координат. Лекція № 5. Криволінійні координати. План лекції:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Радіус-вектор точки. 2. Способи завдання координат у просторі. 3. Координатні поверхні та координатні лінії. 4. Поняття криволінійних координат. 5. Локальний базис криволінійної системи координат. 6. Елементи простору в криволінійних координатах. <p>Лекція № 6. Ортогональні системи координат План лекції:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Коефіцієнти Ламе та їх геометричний зміст. 2. Циліндрична та сферична системи координат як приклади ортогональних криволінійних систем координат. <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	2
	<p>Самостійна робота.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Теоретичне завдання: дослідити елементи простору в криволінійних координатах 2. Практичне завдання: опанування перетворень між системами координат, знаходження коефіцієнтів Ляме, представлення елементів простору в криволінійних координатах <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	14

	ПЗ 5. Завдання координат у просторі, побудова координатних поверхонь та координатних ліній. Представлення базису криволінійної системи координат.	2
	ПЗ 6. Перетворення між системами координат, знаходження коефіцієнтів Ляме, представлення елементів простору в криволінійних координатах	2
<p>Знати: сутність та властивості операцій над тензорами, інваріанти тензора</p> <p>Вміти: здійснювати типові операції над тензорами</p>	<p>Тема 4: Операції над тензорами. Головні осі тензора. Інваріанти тензора. Лекція № 7. Операції над тензорами План лекції:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Елементарні лінійні операції (операції лінійного простору) 2. Добутки і згортки 3. Перестановка індексів. 4. Обернена тензорна ознака 5. Інваріантність тензорних рівнянь <p>Лекція № 8. Головні осі тензора. Інваріанти тензора. План лекції:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Головні осі та інваріанти тензора другого рангу. 2. Приведення тензора до головних осей. 3. Шаровий тензор і девіатор тензора. <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1, 2, 3 Інтернет-ресурси: 1</p>	2
	<p>Самостійна робота.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Теоретичне завдання: дослідити симетричні та антисиметричні тензори. 2. Практичне завдання: розв'язування задач з операціями над тензорами. <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	14
	ПЗ 7. Дії над тензорами. Знаходження добутків та згортки, перестановка індексів.	2

	Застосування оберненої тензорної ознаки. Ілюстрація інваріантності тензорних рівнянь	
	ПЗ 8. Приведення тензора до головних осей. Розклад тензора на шаровий тензор і девіатор тензора.	2
<p>Знати: сутність та властивості тензорних, скалярних і векторних полів та їх характеристики.</p> <p>Вміти: використовувати теоретичні знання про сутність та властивості тензорних, скалярних і векторних полів та їх характеристики на практиці.</p>	<p>Тема 5. Тензорні, скалярні і векторні поля та їх характеристики. Лекція № 9. Тензорні поля. План лекції:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Поняття тензорного поля. 2. Стаціонарні і нестаціонарні тензорні поля. 3. Фізичні та геометричні приклади тензорних полів. 4. Тензор-функція скалярного аргументу, графік та її похідна. 5. Кручення кривої заданої тензор-функцією. 	2
	<p>Лекція № 10. Скалярні поля. План лекції:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Скалярні поля та їх характеристики. 2. Поверхні рівня скалярного поля. 3. Градієнт скалярного поля. 4. Властивості градієнта. 	2
	<p>Лекція № 11. Векторні поля. План лекції:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Векторні поля та їх характеристики. 2. Потік, дивергенція, циркуляція та ротор векторного поля. 3. Побудова векторних ліній векторного поля 4. Поле градієнта і його лінії <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 2 Інтернет-ресурси: 1</p>	2

	<p>Самостійна робота.</p> <p>1. Теоретичне завдання: вивчення та доповнення матеріалу лекції.</p> <p>2. Практичне завдання: знаходження годографу, швидкості та прискорення тензор-функції. Знаходження потоку, дивергенції, циркуляції та ротора векторного поля. Побудова векторних ліній векторного поля.</p> <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	14
	<p>ПЗ 9. Розв'язування задач на знаходження годографу, швидкості та прискорення тензор-функції. Знаходження кручення кривої заданої тензор-функцією.</p>	2
	<p>ПЗ 10. Побудова поверхонь рівня скалярного поля. Обчислення градієнта.</p>	2
	<p>ПЗ 11. Знаходження потоку, дивергенції, циркуляції та ротора векторного поля. Побудова векторних ліній векторного поля. Знаходження поле градієнта і його ліній</p>	2

<p>Знати: сутність та особливості інтегральних теорем векторного аналізу та диференціальних операцій першого і другого порядку.</p>	<p>Тема 6. Інтегральні теореми векторного аналізу. Диференціальні операції першого і другого порядку. Лекція № 12. Інтегральні теореми векторного аналізу. План лекції: 1. Потік векторного поля 2. Теорема Остроградського 3. Лінійні інтеграли та циркуляція векторного поля 4. Теорема Стокса</p>	2
<p>Вміти: використовувати теоретичні знання про сутність та особливості інтегральних теорем векторного аналізу та диференціальних операцій першого і другого порядку на практиці.</p>	<p>Лекція № 13. Диференціальні операції першого і другого порядку. План лекції: 1. Диференціальні операції першого і другого порядків. 2. Оператор Лапласа і гармонічні функції. 3. Оператор Гамільтона набла та його властивості. 4. Застосування оператора набла до добутків скалярних і векторних полів.</p> <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	2
	<p>Самостійна робота. 1. Теоретичне завдання: вивчення та доповнення матеріалу лекції. 2. Практичне завдання: знаходити потік векторного поля. Знаходити циркуляцію векторного поля з використанням теореми Стокса. Виконання диференціальних операцій першого і другого порядку.</p> <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	14
	<p>ПЗ 12. Розв'язання завдань на знаходження потоку векторного поля, побудову ліній другого порядку в декартовій системі координат, знаходження циркуляції векторного поля.</p>	2

	ПЗ 13. Застосування диференціальних операцій першого і другого порядку.	2
<p>Знати: сутність та особливості спеціальних видів векторних полів.</p> <p>Вміти: використовувати теоретичні знання про сутність та особливості спеціальних видів векторних полів на практиці.</p>	<p>Тема 7. Спеціальні види векторних полів. Лекція № 14. Потенціальне векторне поле його особливості та приклади. План лекції:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Потенціальне векторне поле. 2. Критерій потенціальності векторного поля. 3. Визначення скалярного потенціалу поля. 4. Приклади потенціальних полів. <p>Лекція № 15. Інші спеціальні види векторних полів. План лекції:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Соленоїдальне векторне поле. 2. Критерій соленоїдальності. 3. Визначення векторного потенціалу поля. 4. Критерій гармонійності поля. 5. Основна теорема векторного аналізу. <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	2
	<p>Самостійна робота.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Теоретичне завдання: вивчити особливості векторних полів. 2. Практичне завдання: Визначення потенціального векторного поля. Знаходження потенціалу векторного поля. Приклади гармонійного поля. <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	14
	ПЗ 14. Розв'язування завдань на визначення скалярного потенціалу поля. Знаходження потенціалу векторного поля.	2

	ПЗ 15. Розв'язування завдань на визначення векторного потенціалу поля. Приклади виконання критеріїв гармонійності поля. Застосування основної теореми векторного аналізу.	2
<p>Знати: сутність і особливості елементів тензорного аналізу та коваріантного диференціювання тензорів</p> <p>Вміти: використовувати теоретичні знання про сутність і особливості елементів тензорного аналізу та коваріантного диференціювання тензорів на практиці</p>	<p>Тема 8. Елементи тензорного аналізу. Коваріантне диференціювання тензорів. Лекція № 16. Елементи тензорного аналізу. План лекції:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Поле тензора другого рангу. 2. Потік тензорного поля. 3. Приклади обчислення потоку тензорного поля. 4. Похідна тензорного поля в точці за напрямом. 	2
	<p>Лекція № 17. Коваріантне диференціювання тензорів. План лекції:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Коваріантне диференціювання тензора другого рангу. 2. Символи Кристофеля. <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3 Інтернет-ресурси: 1</p>	2
	<p>Самостійна робота.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Теоретичне завдання: вивчити особливості похідної тензорного поля в точці за напрямом. 2. Практичне завдання: Знаходження похідної тензорного поля в точці за напрямом. <p>Коваріантне диференціювання тензорів. Обчислення символів Кристофеля.</p> <p>Список рекомендованих джерел: Основний: 1,2,3,4 Додатковий: 1,2,3</p>	14
	<p>ПЗ 16. Обчислення потоку тензорного поля. Знаходження похідної тензорного поля в точці за напрямом.</p>	2
	<p>ПЗ 17. Коваріантне диференціювання тензорів. Обчислення символів Кристофеля.</p>	2
	Разом	180

3. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

Основні

1. Григорчак О.І., Самар М.І. *Основи векторного і тензорного аналізу у задачах і прикладах: методичні вказівки*. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2022. 72 с.
2. Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф. *Прикладний векторний аналіз: навчальний посібник*. Київ: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2023. 143 с.
3. Гребенюк С.М., Стреляєв Ю.М., Клименко М.І. *Тензорний аналіз: навчальний посібник для студентів освітнього ступеня «бакалавр» напряму підготовки «Математика»*. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 90 с.
4. Наказной П.О. *Тензорний аналіз. Збірник задач: навчальний посібник*. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 35 с.

Додаткові

1. Koranga Bipin Singh, Sanjay Kumar Padaliya. *An Introduction to Tensor Analysis*. New York: CRC Press, 2022. 112 p.
2. Худа Ж.В. *Конспект лекцій з дисципліни «Основи векторного і тензорного аналізу» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня зі спеціальності 104 – "Фізика і астрономія"*. Кам'янське: ДДТУ, 2019. – 65 с.
3. *Елементи векторного аналізу [Текст] : навч. посіб. / С. А. Кривошея [та ін.] ; Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ : Київський університет, 2018. - 263 с. : рис. - Бібліогр.: с. 211.*

Інтернет-ресурси

1. Vector and Tensor Analysis. URL: <http://www.freetextbooklist.com/introduction-to-vectors-and-tensors-vol-2-vector-and-tensor-analysis/>.

**Примітка. Курсивом позначені джерела, наявні в бібліотеці ДТЕУ*