

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТОРГОВЕЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ**

**СИСТЕМА УПРАВЛІННЯ ЯКІСТЮ**

**Система забезпечення якості освітньої діяльності та якості вищої  
освіти**

*сертифікована на відповідність ДСТУ ISO 9001:2015 / ISO 9001:2015*

**Кафедра вищої та прикладної математики**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**  
вченою радою  
(пост. п. \_\_\_\_\_ від "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 2022 р.)  
Ректор



А.А. Мазаракі

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ /  
EQUATIONS DIFFERENTIAL**

**ПРОГРАМА /  
COURSE SUMMARY**

**Київ 2020**

**Розповсюдження і тиражування без офіційного дозволу КНТЕУ  
заборонено**

Автори: С.В. МИХАЙЛЕНКО, кандидат фіз.– матем. наук, доцент  
кафедри вищої та прикладної математики,  
С.В. БІЛОУСОВА, кандидат фіз. – матем. наук, доцент  
кафедри вищої та прикладної математики

Програму розглянуто та схвалено на засіданні кафедри вищої та  
прикладної математики 8 грудня 2020 р., протокол № 9

Рецензенти: В.І. ДЕНИСЕНКО, кандидат фіз. – матем. наук, доцент  
кафедри вищої та прикладної математики,  
П.Г. ДЕМІДОВ, кандидат технічних наук, доцент кафедри  
комп'ютерних наук та інформаційних систем

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ /  
EQUATIONS DIFFERENTIAL**

**ПРОГРАМА /  
COURSE SUMMARY**

## ВСТУП

Програма дисципліни «Диференціальні рівняння» призначена для здобувачів першого рівня вищої освіти ОС «Бакалавр», галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», спеціалізації «Комп'ютерні науки» та галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології», спеціалізації «Інформаційні системи та технології».

Програму підготовлено відповідно до вимог Стандартів вищої освіти України та відповідних освітньо-професійних програм підготовки бакалаврів.

Програма складається з таких розділів:

1. Мета, завдання та предмет дисципліни.
2. Передумови вивчення дисципліни як вибіркової компоненти освітньої програми.
3. Результати вивчення дисципліни.
4. Зміст дисципліни.
5. Список рекомендованих джерел.

### 1. МЕТА, ЗАВДАННЯ ТА ПРЕДМЕТ ДИСЦИПЛІНИ

*Метою* вивчення дисципліни «Диференціальні рівняння» є формування у студентів уміння використовувати диференціальні рівняння як математичні моделі при дослідженні явищ, процесів різної природи для ефективного вирішення завдань у професійній діяльності.

*Завданням* вивчення дисципліни «Диференціальні рівняння» є надання теоретичних знань і формування практичних навичок з побудови, розв'язання, дослідження та аналізу математичних моделей на основі диференціальних рівнянь; засвоєння ними математичних предметних знань про звичайні диференціальні рівняння першого та вищих порядків, системи диференціальних рівнянь, теорію стійкості диференціальних рівнянь і систем, диференціальні рівняння в частинних похідних; опанування студентами навчальними діями застосування процедур розв'язування різних типів диференціальних рівнянь та систем в обраній професії.

*Предметом* вивчення дисципліни є диференціальні рівняння, системи звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівняння з частинними похідними та методи їх розв'язування.

## 2. ПЕРЕДУМОВИ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ ЯК ВИБІРКОВОЇ КОМПОНЕНТИ ОСВІТНЬОЇ ПРОГРАМИ

Знання та вміння, набуті під час вивчення дисциплін «Математичний аналіз», «Дискретна математика».

## 3. РЕЗУЛЬТАТИ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Дисципліна «Диференціальні рівняння», як вибіркова компонента освітньо-професійної програми, забезпечує оволодіння студентами загальними та фаховими компетентностями і досягнення ними програмних результатів навчання за відповідними освітньо-професійними програмами:

*Комп'ютерні науки (ОС бакалавр)*

Номер в освітній програмі	Зміст компетентності	Номер теми, що розкриває зміст компетентності
<i>Загальні компетентності за освітньо-професійною програмою</i>		
ЗК 2	Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.	1,3,7,9,10
<i>Фахові компетентності за освітньо-професійною програмою</i>		
СК 1	Здатність до математичного формулювання та досліджування неперервних та дискретних математичних моделей, обґрунтування вибору методів і підходів для розв'язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп'ютерних наук, аналізу та інтерпретування	1,2,3,4,7,9,10
<i>Програмні результати навчання за освітньо-професійною програмою</i>		
ПР 2	Використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів інформатизації.	2,3,4,5,7,9,10
ПР 4	Використовувати методи обчислювального інтелекту, машинного навчання, нейромережевої та нечіткої обробки даних, генетичного та еволюційного програмування для розв'язання задач розпізнавання, прогнозування, класифікації, ідентифікації об'єктів керування тощо.	2,3,4,5,7,9,10

ПР 6	Використовувати методи чисельного диференціювання та інтегрування функцій, розв'язання звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь, особливостей чисельних методів та можливостей їх адаптації до інженерних задач, мати навички програмної реалізації чисельних методів.	3,4,5,6,7,8,9,10
ПР 12	Застосовувати методи та алгоритми обчислювального інтелекту та інтелектуального аналізу даних в задачах класифікації, прогнозування, кластерного аналізу, пошуку асоціативних правил з використанням програмних інструментів підтримки багатовимірного аналізу даних на основі технологій DataMining, TextMining, WebMining.	3,4,5,6,7,8,9,10

*Інформаційні системи та технології (ОС бакалавр)*

<i>Загальні компетентності за освітньо-професійною програмою</i>		
КЗ 2	Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.	1,3,7,9,10
КЗ 5	Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями.	1,3,7,9,10
<i>Фахові компетентності за освітньо-професійною програмою</i>		
КС 11	Здатність до аналізу, синтезу і оптимізації інформаційних систем та технологій з використанням математичних моделей і методів.	1,2,3,4,7,9,10
КС 13	Здатність проводити обчислювальні експерименти, порівнювати результати експериментальних даних і отриманих рішень.	1,8
<i>Програмні результати навчання за освітньо-професійною програмою</i>		
ПР 1	Знати лінійну та векторну алгебру, диференціальне та інтегральне числення, теорію функцій багатьох змінних, теорію рядів, диференціальні рівняння для функції однієї та багатьох змінних, операційне числення, теорію ймовірностей та математичну статистику в обсязі, необхідному для розробки та використання інформаційних систем, технологій та інфокомунікацій, сервісів та інфраструктури організації.	2,3,4,5,7,9,10

ПР 2	Застосовувати знання фундаментальних і природничих наук, системного аналізу та технологій моделювання, стандартних алгоритмів та дискретного аналізу при розв'язанні задач проектування і використання інформаційних систем та технологій.	3,4,5,6,7,8,9,10
------	--	------------------

#### **4. ЗМІСТ ДИСЦИПЛІНИ**

##### **Тема 1. Диференціальні рівняння в технології математичного моделювання об'єктів, процесів та явищ.**

Попередні відомості про диференціальні рівняння. Приклади задач, що приводять до утворення диференціальних рівнянь. Технологія математичного моделювання. Математичні моделі об'єктів, процесів і явищ та їх класифікація. Тенденції та перспективи розвитку комп'ютерного моделювання. Приклади використання диференціальних рівнянь в природничих науках. Використання диференціальних рівнянь в економічних дослідженнях. Диференціальні рівняння попиту та пропозиції. Модель макроекономічної динаміки Харрода-Домара. Модель економічного зростання Солоу.

##### **Список рекомендованих джерел:**

*Основний: 1, 2, 3, 4*

*Додатковий: 1, 2, 3*

##### **Тема 2. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь.**

Поняття диференціального рівняння, його порядок. Диференціальні рівняння розв'язані відносно похідної. Диференціальні рівняння записані в диференціалах. Задача Коші. Теореми Пікара та Пеано. Поняття загального розв'язку, форми його запису. Частинні й особливі розв'язки. Знаходження кривих, підозрілих на особливість розв'язку. Інтеграл диференціального рівняння та його загальний вигляд.

##### **Список рекомендованих джерел:**

*Основний: 1, 2, 3, 4*

*Додатковий: 1, 2, 3*

##### **Тема 3. Інтегровані типи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язані відносно похідної.**

Диференціальні рівняння, що не містять шуканої функції (неповні рівняння). Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння та звідні до них. Лінійні диференціальні рівняння

першого порядку та загальні властивості їх розв'язків. Метод Бернуллі. Метод Лагранжа (метод варіації довільної сталої). Метод Ейлера. Рівняння Бернуллі. Рівняння Ріккати та його властивості. Рівняння в повних диференціалах. Інтегровальний множник. Теореми про існування, неєдність і загальний вигляд інтегровального множника.

**Список рекомендованих джерел:**

*Основний: 1, 2, 3, 4*

*Додатковий: 1, 2,3*

**Тема 4. Неявні диференціальні рівняння першого порядку.**

Основні поняття та означення. Теорема про достатні умови існування та єдиності розв'язку. Знаходження кривих, підозрілих на особливий розв'язок. Загальний метод введення параметра. Диференціальні рівняння, розв'язані відносно шуканої функції. Диференціальні рівняння, розв'язані відносно незалежної змінної. Рівняння Лагранжа. Рівняння Клеро. Диференціальні рівняння, що містять тільки похідну. Диференціальні рівняння, що не містять шуканої функції. Диференціальні рівняння, що не містять незалежної змінної. Узагальнено-однорідні рівняння.

**Список рекомендованих джерел:**

*Основний: 1, 2, 3, 4*

*Додатковий: 1, 2,3*

**Тема 5. Інтегрування і зниження порядку диференціальних рівнянь вищих порядків.**

Динамічна інтерпретація диференціального рівняння другого порядку. Консервативні системи. Задача Коші. Достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Загальний розв'язок і загальний інтеграл, частинний та особливий розв'язки. Проміжні та перші інтеграли. Крайова задача. Диференціальні рівняння, що містять похідну  $n$ -го порядку від шуканої функції та незалежну змінну. Інтегрування диференціальних рівнянь, що не містять шуканої функції та послідовності перших похідних. Зниження порядку диференціальних рівнянь, що не містять незалежної змінної. Однорідні диференціальні рівняння відносно шуканої функції та її похідних. Диференціальні рівняння, ліва частина яких є точною похідною

**Список рекомендованих джерел:**

*Основний: 1, 2, 3, 4*

*Додатковий: 1, 2,3*

## **Тема 6. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку.**

Лінійний диференціальний оператор та його властивості. Властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку. Необхідні й достатні умови лінійної незалежності n розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку. Формула Остроградського-Ліувілля. Фундаментальна система розв'язків та її існування. Загальний розв'язок. Кількість лінійно незалежних розв'язків. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів. Структура загального розв'язку неоднорідного лінійного рівняння. Метод варіації довільних сталих. Метод Коші. Метод невизначених коефіцієнтів. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі змінними коефіцієнтами, що зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Зведення диференціальних рівнянь другого порядку до рівняння, що не містить члена з першою похідною. Спряжені, самоспряжені диференціальні оператори, крайові умови та крайові задачі. Зведення лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до самоспряженого вигляду. Задача Штурма-Ліувілля. Функція Гріна.

### **Список рекомендованих джерел:**

*Основний: 1, 2, 3, 4*

*Додатковий: 1, 2, 3*

## **Тема 7. Основні поняття та загальні властивості розв'язків. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь.**

Основні поняття та означення. Задача Коші. Теореми про достатні умови існування та єдиності розв'язку системи від початкових даних і параметрів. Загальний, частинний і особливий розв'язки. Інтеграл. Перший і загальний інтегралі. Кількість незалежних інтегралів. Зниження порядку системи за допомогою перших інтегралів. Системи диференціальних рівнянь у симетричній формі. Однорідні системи. Лінійно незалежні розв'язки. Теореми про лінійно залежні й незалежні розв'язки. Інтегральна (фундаментальна) матриця. Визначник Вронського. Формула Якобі. Спряжені системи. Неоднорідні системи. Метод варіації довільної сталої. Формула Коші. Однорідні лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Випадки інтегровності лінійних систем у квадратурах. Матричний метод інтегрування однорідних стаціонарних систем. Структура фундаментальної системи розв'язків. Метод Ейлера.

### **Список рекомендованих джерел:**



*Основний: 1, 2, 3, 4*

*Додатковий: 1, 2,3*

## **Тема 8. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь і систем та дослідження стійкості їх розв'язків.**

Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів. Метод Ейлера чисельного розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку. Модифікація методу Ейлера. Метод Ейлера чисельного розв'язання систем диференціальних рівнянь. Метод Рунге-Кутта. Метод Адамса. Метод Мілна. Метод Ейлера чисельного розв'язання систем диференціальних рівнянь. Застосування математичного пакета Maple та середовища Matlab для інтегрування диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь. Стійкість і нестійкість розв'язків. Основні означення й поняття стійкості за Ляпуновим. Стійкість розв'язків лінійної системи.

### **Список рекомендованих джерел:**

*Основний: 1, 2, 3, 4*

*Додатковий: 1, 2,3*

## **Тема 9. Диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними.**

Задачі, при розв'язанні яких отримуються диференціальні рівняння з частинними похідними. Основні поняття та означення. Повний, особливий та загальний інтеграл диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку. Лінійні однорідні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними та їх зв'язок з системами звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі. Побудова загального розв'язку лінійних однорідних рівнянь з частинними похідними. Розв'язання задачі Коші для лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Квазілінійні рівняння з частинними похідними першого порядку та геометричне тлумачення їх розв'язків.

### **Список рекомендованих джерел:**

*Основний: 1, 2, 3, 4*

*Додатковий: 1, 2,3*

## **Тема 10. Диференціальні рівняння другого порядку з частинними похідними.**

Простіші задачі, що приводять до диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку. Побудова загального розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку методом характеристик. Метод відокремлених змінних (метод Фур'є).

### **Список рекомендованих джерел:**

*Основний: 1, 2, 3, 4*

*Додатковий: 1, 2, 3*

## **5. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ**

### **Основний**

1. Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т., Харченко І.І. Диференціальні рівняння для інформатиків: підручник.- К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008, - 352с.
2. Головатий Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк С. П. Диференціальні рівняння: навч. посібник. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 407 с.
3. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600с.*
4. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О., Диференціальні рівняння у задачах. – К.: Либідь, 2003. – 504с.*

### **Додатковий**

1. Каленюк П. І. Диференціальні рівняння /П. І. Каленюк, Р. М. Рудавський, Р. М. Тацій та ін. – Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2014. – 380 с
2. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С.А. Кривошея, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. – К. : Либідь, 2004. – 408 с.
3. Рудавський Ю.К. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ю. К. Рудавський, П. І. Каленюк, Р. М. Тацій та ін. – Львів : Вид-во Національного університету «Львівська політехніка», 2001. – 244 с.

*\*Примітка. Курсивом позначені джерела, наявні в бібліотеці КНТЕУ*